Midtoets Complexe Analyse, 01/10/2009

Het boek mag bij deze midtoets niet gebruikt worden.

1. Waar is de functie $f(z) = \sin(y)\cos(x) + i\cos(y)\sin(x)$ met $z = x + iy$ differentieerbaar?

2. Bepaal de afgeleide van de hoofdtak (principal branch) van z^{2+3i} in $z = i$.

3. Gegeven
$$I = \int_\Gamma (z-1)^{-1} dz,$$
waarbij de halve cirkel Γ wordt geparametriseerd door $z(t) = 1 + re^{it}$ met $0 \leq t \leq \pi$:

   a. Bepaal een bovengrens voor de modulus van I.

   b. Bepaal I.

4. Bepaal met behulp van de Cauchy integraalstelling
$$\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz,$$
waarbij Γ de eenmaal in positieve zin (tegen de klok in) doorlopen cirkel $|z-1| = 1$ is.

1

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1
Adres:	Studierichting: sk+wi	Tentamen: midtoets complexe Analyse
Postcode en		Datum: 10okt 2009
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving: 2007	Naam docent:

1 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{vmatrix}$

f(z) differentieerbaar in de punten waar geldt: $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$ is van de vorm (CR) $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$

10

dus als geldt $\cos(x)\cos(y) = 0$

$\cos(x) = 0$ en/of $\cos(y) = 0$

$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ en/of $y = \frac{1}{2}\pi + \ell\pi$

k, p integers.

2 $e^{\log(z^{2+3i})} = e^{(2+3i)\log(z)} = z^{2+3i}$

$\log(z) = \text{Log}\,|z| + i\,\text{Arg}(z) + 2k\pi i$

$z = i$

$\log(i) = \text{Log}\,|i| + i\,\text{Arg}(i) + 2k\pi i$

$\log(i) = \log(1) + i \cdot \frac{1}{2}\pi + 2k\pi i = \frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i$

hoofdtak: $[-\pi, \pi\rangle$

$\text{Arg}(i) = \frac{1}{2}\pi$ en ligt dus in $[-\pi,\pi\rangle$

9

$\log(i) = \frac{1}{2}\pi$

$\frac{d}{dz} e^{(2+3i)\log(z)} = \frac{2+3i}{z} \cdot e^{(2+3i)\log(z)}$

in $z = i$: $\frac{2+3i}{i} e^{(2+3i)\cdot\frac{1}{2}\pi i} = (-2i+3)\, e^{\pi + \frac{3}{2}\pi i} = (2i-3)e^{\pi}$

$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$

4 $\int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^2-1}\,dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^2-1}\,dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)}\,dz$

poles $z = 1$ en $z = -1$

Cauchy: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

~~$|z-1| \geq ||z|-|1|| = |z|-1 = 1 \rightarrow$~~ ~~$2 \geq |z| \geq 0$~~

~~Kom $z \geq 2$ ... $z-1 \geq$ ... $\frac{1}{z-1} \leq 1$~~

~~[illegible]~~

$e^{it} \leq 1 \quad Re^{it} \leq R \quad$ dus $\quad z(t) = 1 + Re^{it} \leq 1+R$

b $I = \int_\Gamma \frac{1}{(z-1)} dz = \int_0^\pi \frac{1}{z(t)-1} z'(t)\, dt$

6

$= \int_0^\pi \frac{1}{1+Re^{it}-1} iRe^{it}\, dt$

$= \int_0^\pi \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}\, dt = \int_0^\pi i\, dt = i\pi$

$z'(t) = Rie^{it}$

4 ~~$z = Re^{it} \quad 0 \leq R \leq 2 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$~~

~~$\oint \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2Re^{it}}}{Re^{2Rit}-1} iRe^{it}\, dt$~~

~~$f(0) = \frac{e^0}{-1} = -1 = \oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z^2-1)z} dz$~~

8

~~$f(2) = \frac{e^4}{3} = \int_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z-2)} dz$~~

$2\pi i$

$\oint g(z) = \int_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz$

$g(+1) = \frac{e^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)} dz$

$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)} dz = 2\pi i \cdot -\frac{1}{2} e^{-2} = -\pi i e^{-2}$

$h(z) = \frac{e^{2z}}{z+1} dz$

$h(1) = \frac{e^2}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)} dz$

$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)} = \pi i e^2$? niet gelijk